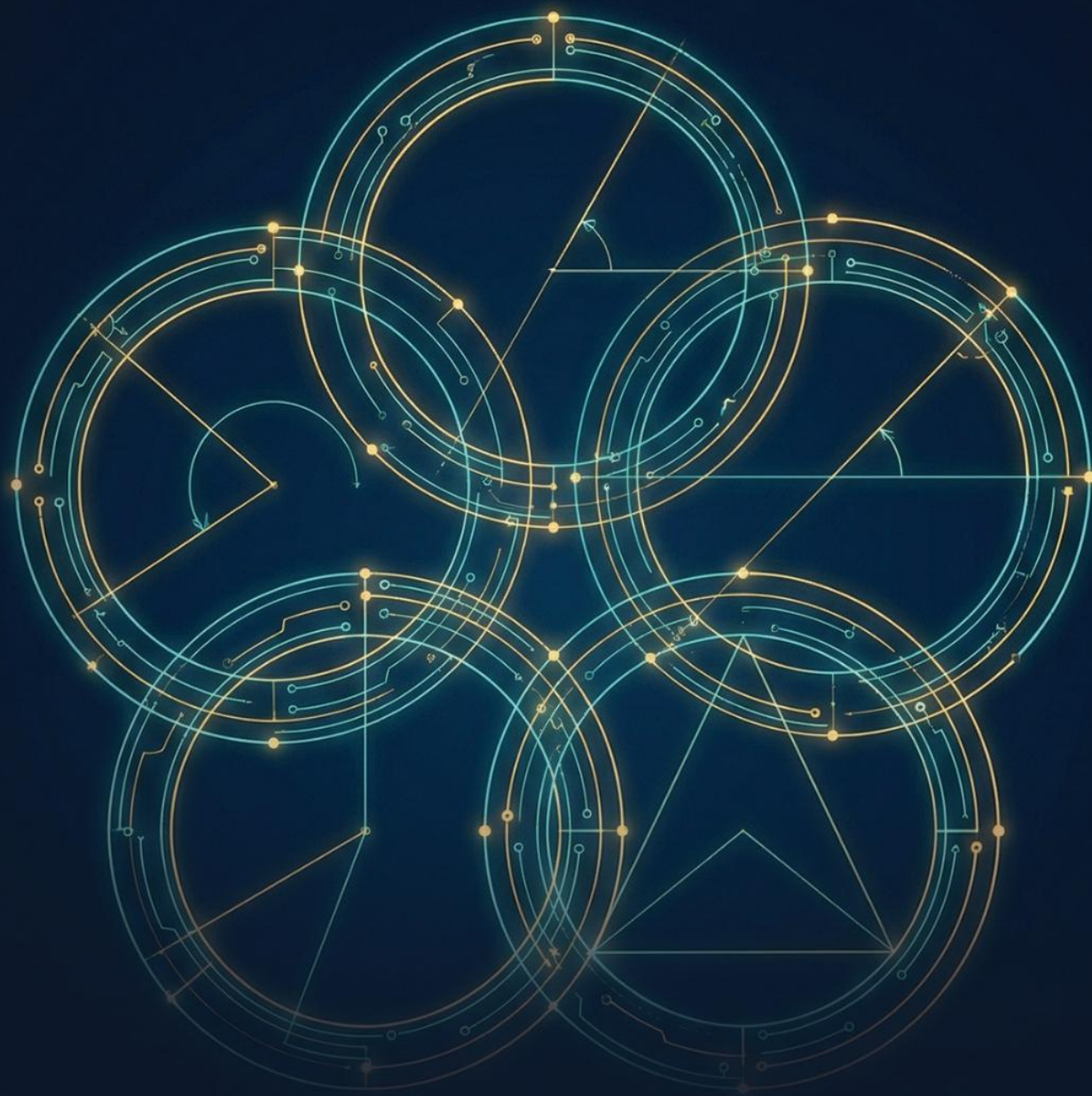




GEOMETRIA OLIMPIJSKA.

JAK NIE POTKNAĆ SIĘ NA PROSTEJ?

JAKUB PIECZONKA

INDEKS W KIESZENI

JAKUB PIECZONKA

Geometria olimpijska

Jak nie potknąć się na prostej?

Wersja demonstracyjna

WARSZAWA 2026

© Copyright by Indeks w Kieszeni, Warszawa 2026

Wydanie I

Autor: Jakub Pieczonka

Projekt graficzny okładki: Grzegorz Przybyło

ISBN: 978-83-68290-10-3

Wydawnictwo Indeks w Kieszeni

IWK MAT sp. z o.o.

www.indekswkieszeni.pl

1 Wstęp

1.1 Jak korzystać z e-booka?

Ten e-book omawia szeroki zakres materiału, obejmującego wszystko, co niezbędne do rozwiązywania zadań z geometrii na Olimpiadzie Matematycznej Juniorów. Do korzystania ze zbioru nie jest potrzebna już w punkcie wyjścia wiedza olimpijska. Zawarte w nim materiały opierają się na podstawowych zagadnieniach omawianych w szkole podstawowej. Do najważniejszych należą:

- twierdzenie Pitagorasa;
- nierówność trójkąta;
- kąty naprzemianległe, odpowiadające, wierzchołkowe i przyległe;
- kąty ostre, proste, półpełne i pełne;
- trójkąty równoramienne, równoboczne, ostrokątne i rozwartokątne;
- suma kątów w trójkącie i czworokącie;
- trójkąt $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$.

Na końcu obu rozdziałów, składających się na publikację, znajdują się zbiory zadań skupione na omawianej tematyce, poprzedzone conajmniej jednym przykładem rozwiązania zadania. Zadania są uporządkowane według poziomu trudności — od najłatwiejszych do najtrudniejszych. Nie wszystkie zadania mają spisane pełne rozwiązania (część z nich uwzględnia [sekcja 4.2](#)), jednak wszystkie zadania i ćwiczenia zawierają wskazówki ([sekcja 4.1](#)).

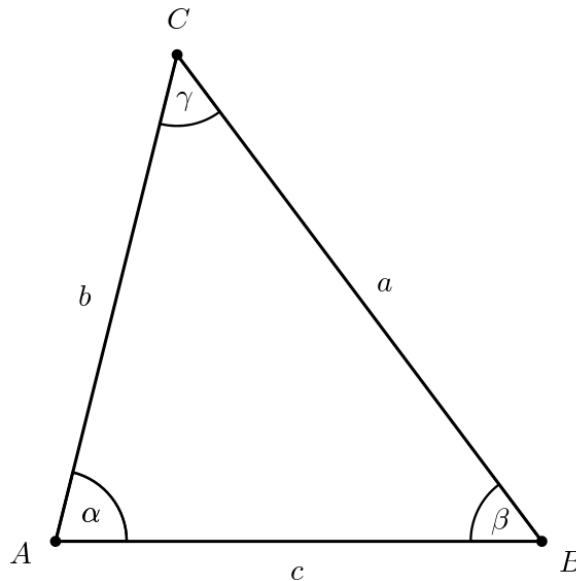
Do większości zadań podano po kilka wskazówek — im trudniejsze zadanie, tym więcej wskazówek. Zaleca się zapoznanie się z nimi w kolejności, w jakiej zostały zamieszczone. Czasami może się zdażyć, że dowód korzysta z twierdzenia albo definicji wprowadzonej w dalszej części książki. Choć takich przypadków jest mało i specjalnie twierdzenia nie są wykorzystywane w pełni, to w tych sytuacjach najlepiej wrócić do tego zadania po raz drugi po zapoznaniu się z całością materiału.

1.2 Oznakowanie i nazewnictwo

W całej książce będziemy stosować następujące oznaczenia i konwencje geometryczne:

- Trójkąt oznaczamy jako $\triangle ABC$.
- Długość boku naprzeciwko wierzchołka A oznaczamy przez a , analogicznie $b = AC$, $c = AB$.
- Kąty wewnętrzne trójkąta ABC oznaczamy przez $\alpha = \angle BAC$, $\beta = \angle ABC$, $\gamma = \angle ACB$.
- Okrąg opisany na trójkącie ABC oznaczamy przez (ABC) .

- Okrąg opisany na wielokącie $A_1A_2 \dots A_k$ oznaczamy jako $(A_1A_2 \dots A_k)$.



Rysunek 1.1: oznakowanie trójkąta

Dodatkowo:

- Odległość punktu P od prostej d oznaczamy przez $d(P, d)$.
- Kąt między prostymi l i k oznaczamy przez $\angle(l, k)$ i oznaczamy mniejszy z dwóch kątów, które proste tworzą.
- $[A_1A_2 \dots A_n]$ oznacza pole wielokąta $A_1A_2 \dots A_n$.
- Symbol $\parallel$ oznacza równoległość, a $\perp$ - prostopadłość.
- Trójkąty przystające oznaczamy przez symbol $\cong$, np. $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.
- Symbol $A \Rightarrow B$ oznacza implikację - "Jeśli A to B ".
- Symbol $A \iff B$ oznacza równoważność - "A wtedy i tylko wtedy gdy B" albo "Jeśli A to B i jeśli B to A ".
- **Rzutem prostokątnym** punktu P na prostą k nazywamy taki punkt P' na prostej k , że zachodzi $PP' \perp k$.
- Dla punktów A, B na okręgu ω poprzez $\widehat{AB}$ oznaczamy, jeden z łuków wyznaczanych na okręgu ω przez punkty A, B . Zwykle, który z łuków jest sprecyzowane wcześniej, lub wynika z kontekstu.

Te oznaczenia będą używane we wszystkich twierdzeniach, ćwiczeniach i zadaniach w dalszych rozdziałach.

2 Podstawowe narzędzia

W tym rozdziale zebrane zostały podstawowe techniki i obserwacje, z których będziemy korzystać w dalszej części książki. Są to narzędzia proste, ale bardzo uniwersalne — w praktyce wystarczają do rozwiązania większości zadań geometrycznych. W kolejnych podrozdziałach pojawiają się m.in. zależności kątowe, własności trójkątów przystających, klasyczne konfiguracje w trójkącie oraz podstawowe fakty związane z okręgami.

Nie jest to rozdział wprowadzający do tematu od zera. Zakładana jest znajomość podstawowych pojęć i twierdzeń, a celem tej części jest raczej ich uporządkowanie i przypomnienie w formie użytecznej przy rozwiązywaniu zadań.

Do opisanych tu narzędzi będziemy regularnie wracać w kolejnym rozdziale i w zadaniach olimpijskich. Warto więc traktować ten fragment jako punkt odniesienia — zestaw faktów i technik, które warto mieć „pod ręką” podczas rozwiązywania zadań.

2.1 Kąty - twój największy sprzymierzeniec

Kąty są jednym z najczęściej wykorzystywanych narzędzi w geometrii i w bardzo wielu zadaniach to właśnie od ich analizy zaczynamy rozwiązanie. Proste obserwacje kątowe pozwalają szybko rozpoznać trójkąty przystające, równoramienne a także zidentyfikować istotne zależności w bardziej złożonych konfiguracjach.

Fakt 2.1.1 (Suma kątów w trójkącie). Kąty w trójkącie sumują się do 180° .

Fakt 2.1.2 (Suma kątów w czworokącie). Kąty w czworokącie sumują się do 360° .

Te fakty nie powinny być niczym nowym, ponieważ są najczęściej wykorzystywanymi właściwościami w liczeniu kątów. Tak samo korzystać będziemy sporo z kątów wierzchołkowych, naprzemianległych itp. Możemy od razu przejść do bardziej zaawansowanych własności.

Definicja 2.1.3. Kąt środkowy to kąt, którego wierzchołek znajduje się w środku okręgu, a ramiona przechodzą przez dwa punkty tego okręgu.

Definicja 2.1.4. Kąt wpisany to kąt, którego wierzchołek leży na okręgu, a ramiona przecinają okrąg w dwóch różnych punktach.

Fakt 2.1.5 (Własność kąta środkowego i wpisanego). Kąt wpisany oparty na tym samym łuku co kąt środkowy ma miarę dwa razy mniejszą od kąta środkowego.

Dowód. Niech O będzie środkiem okręgu, a A, B, C punktami na okręgu takimi, że $\angle ACB = \alpha$. Rozpatrzmy trzy przypadki:

1. Punkt C leży na zewnątrz kąta AOB i punkt O leży wewnątrz kąta ACB . Wtedy trójkąty OAC i OBC są równoramienne, ponieważ $OA = OC = OB = R$.

$$\angle OAC + \angle OBC = \angle ACO + \angle OCB = \alpha.$$

Ponadto suma kątów w trójkącie ABC wynosi 180° , więc

$$\angle OAC + \angle OBC + \angle OBA + \angle OAB + \alpha = 180^\circ.$$

Upraszczając,

$$2\alpha + 180^\circ - \angle AOB = 180^\circ.$$

Po przekształceniu otrzymujemy $\angle AOB = 2\alpha$.

2. Punkt C leży na zewnątrz kąta AOB oraz punkt O leży na zewnątrz kąta ACB . Bez straty ogólności założmy, że punkty B i O leżą po przeciwnej stronie prostej AC . Analogicznie, $\triangle OAC$ i $\triangle OBC$ są równoramienne, więc

$$\begin{aligned}\angle OAB &= \angle OAC + \angle CAB = \angle CAB + \angle OCA \\ &= \angle CAB + \angle OCB - \angle ACB = \angle CAB + \angle OBC - \alpha \\ &= \angle CAB + \angle CBA - \angle OBA - \alpha = 180^\circ - 2\alpha - \angle OBA.\end{aligned}$$

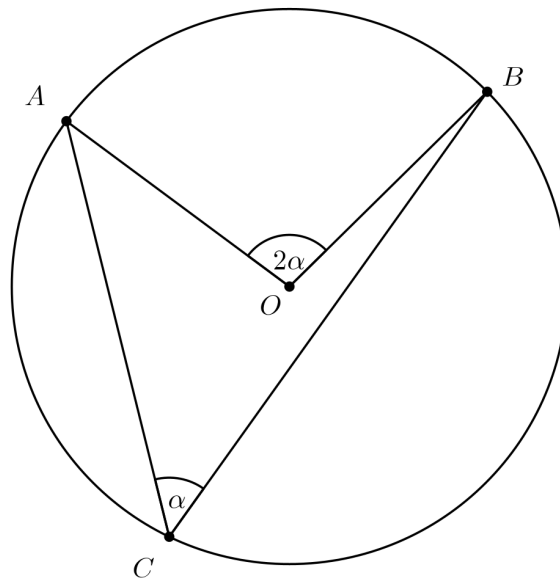
A więc,

$$\angle AOB = 180^\circ - \angle OAB - \angle OBA = 2\alpha.$$

3. Punkt C leży wewnątrz kąta AOB . Rachunki są analogiczne.

Zatem zawsze $\angle ACB = \frac{1}{2}\angle AOB$. □

Ćwiczenie 2.1.6. Dokończyć dowód faktu 2.1.5 - trzeci przypadek.



Rysunek 2.1: kąt środkowy i wpisany

Wniosek 2.1.7

Wszystkie kąty wpisane oparte na tym samym łuku mają tę samą miarę.

Dowód. Niech A, B będą końcami łuku, a C dowolnym punktem tego łuku. Wtedy kąt $\angle ACB$ jest połową kąta środkowego opartego na łuku AB , więc nie zależy od wyboru C . □

Wniosek 2.1.8

Kąty wpisane oparte na łukach o tej samej długości i w tym samym okręgu mają równą miarę.

Pozostawiamy to bez dowodu. Korzysta on z własności kątów wpisanych i środkowych (fakt 2.1.5) oraz przystawiania trójkątów.

Wniosek 2.1.9

Jeśli kąt wpisany jest oparty na średnicy okręgu, to jest prosty.

Dowód. Niech AB będzie średnicą okręgu o środku O , a C punktem na okręgu. Wtedy $\angle ACB = \frac{1}{2}\angle AOB = \frac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ$. $\square$

Teraz możemy wykorzystać wypracowane powyżej własności, aby udowodnić kluczowe twierdzenie, które będzie podstawą dużej liczby rozwiązań. Najpierw wprowadzimy następujące nazewnictwo.

Definicja 2.1.10. Czworokąt nazywamy **cyklicznym** (lub **wpisanym w okrąg**), jeśli wszystkie jego wierzchołki leżą na jednym okręgu. Okrąg ten nazywamy **okręgiem opisanym** na czworokącie. Zgodnie z sekcją 1.2 oznaczamy go $(ABCD)$ dla czworokąta o wierzchołkach A, B, C, D .

Wiemy, że na każdym trójkącie można opisać okrąg (patrz sekcja 2.3.1). Naturalnym następstwem tego faktu jest więc pytanie "Kiedy okrąg można wpisać w czworokąt?". Na pytanie to odpowiada poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 2.1.11 (Kryterium cykliczności czworokąta)

Niech $ABCD$ będzie dowolnym czworokątem wypukłym. Wtedy następujące trzy własności są ze sobą równoważne:

1. $ABCD$ jest cykliczny.
2. $\angle ABC + \angle CDA = 180^\circ$.
3. $\angle ADB = \angle ACB$.

Dowód. Zauważmy że wystarczy pokazać że dwie pary z tych własności są ze sobą równoważne, udowodnimy więc że równoważne są 1 i 2 oraz 1 i 3.

(1 $\Rightarrow$ 2) Jeśli czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg, to kąty $\angle ABC$ i $\angle CDA$ są oparte na łukach $\widehat{AD}$, ale leżą po przeciwnych stronach okręgu. Oznaczmy środek tego okręgu jako O . Z własności kątów środkowych (fakt 2.1.5) otrzymujemy:

$$\angle ABC = \frac{\angle AOC}{2} \text{ oraz } \angle CDA = \frac{\angle COA}{2}.$$

Kluczowe tutaj jest rozróżnienie kątów $\angle AOC$ i $\angle COA$ - są po różnych stronach prostych OA i OC , razem tworzą kąt pełny. tego, korzystając z powyższych równości, otrzymujemy:

$$\angle ABC + \angle CDA = 180^\circ.$$

(2 $\Rightarrow$ 1) Załóżmy, że $\angle ABC + \angle CDA = 180^\circ$. Niech ω będzie okręgiem opisanym na trójkącie ABC . Chcemy pokazać $D \in \omega$. Niech $D' \neq C$ będzie przecięciem prostej CD z ω . Wtedy korzystając z powyższego dowodu, mamy

$$\angle ABC + \angle CD'A = 180^\circ.$$

Więc $\angle CDA = \angle CD'A$. Jednak skoro C, D, D' leżą na jednej prostej to otrzymujemy $D = D'$.

(1 $\Rightarrow$ 3) Jeśli $ABCD$ jest cykliczny, to kąty $\angle ADB$ i $\angle ACB$ są oparte na tym samym łuku AB . Zatem z własności kątów wpisanych (wniosek 2.1.7) mamy:

$$\angle ADB = \angle ACB.$$

(3 $\Rightarrow$ 1) Załóżmy, że $\angle ADB = \angle ACB$. Niech ω będzie okręgiem opisanym na trójkącie ABC . Niech $D' \neq A$ będzie przecięciem prostej AD z ω . Wtedy korzystając z powyższego dowodu, mamy

$$\angle AD'B = \angle ACB.$$

Więc $\angle AD'B = \angle ADB$. Jednak skoro A, D, D' leżą na jednej prostej, to otrzymujemy $D = D'$. □

Definicja 2.1.12. Trapez to czworokąt, który ma co najmniej jedną parę przeciwnych równoległych boków. W szczególności czworokąt nazywamy **trapezem równoramiennym** wtedy, gdy dokładnie jedna para boków przeciwnych jest równoległa, a druga ma równe długości.

Fakt 2.1.13 (Trapez równoramienny). W trapezie równoramiennym z $AB \parallel CD$ oraz $BC = AD$ zachodzi

$$\angle ADC = \angle DCB.$$

Ćwiczenie 2.1.14. Udowodnij, że trapez jest cykliczny wtedy i tylko wtedy gdy jest on równoramienny.

Powyższe ćwiczenie przedstawia częstą konfigurację, która pojawia się w zadaniach. W zakończeniu tej sekcji zajmijmy się poniższym kryterium styczności prostej do okręgu.

Definicja 2.1.15. Mówimy że prosta k jest **styczna** do okręgu ω , gdy przecina ona ten okrąg w dokładnie jednym punkcie.

Twierdzenie 2.1.16 (Kryterium styczności prostej do okręgu)

Niech O będzie środkiem okręgu ω . Niech punkty A, B, C będą dowolnymi punktami leżącymi na tym okręgu oraz niech k będzie dowolną prostą przechodzącą przez C . następujące trzy własności są ze sobą równoważne:

1. Prosta k jest styczna do okręgu ω .
2. $OP \perp k$.
3. $\angle(k, AC) = \angle ABC$.

Przygotuj się do Olimpiady Matematycznej Juniorów – krok po kroku.

Ten ebook pomoże Ci samodzielnie opanować geometrię potrzebną na ten konkurs. Został napisany z myślą o uczniach klas **6–8**, którzy chcą rozpocząć przygodę z geometrią albo uporządkować i pogłębić wiedzę.

Co znajdziesz w środku?

- **Dwa działy teorii:** jeden z podstawami, drugi z bardziej zaawansowanymi technikami rozwiązywania złożonych problemów geometrycznych;
- **Zbiór zadań** o narastającej trudności — od podstaw do poziomu finału i obozu naukowego,
- **Wskazówki do wszystkich zadań;**
- **Pełne rozwiązania** do wybranych, trudniejszych problemów.

To materiał na co najmniej 30 godzin solidnej pracy, która realnie kształtuje umiejętność samodzielnego rozwiązywania zadań olimpijskich.

Wydawnictwo



**INDEKS
W KIESZENI**

Warszawa 2026

ISBN: 978-83-68290-10-3